

## DETECTABILIDAD Y OBSERVABILIDAD DEL PROCESO DE DIGESTIÓN ANAERÓBICA

Martín Jamilis, Sebastián Nuñez, Fabricio Garelli, Hernán De Battista

Grupo de Control aplicado, Instituto LEICI, Facultad de Ingeniería, UNLP-CONICET, calle 48 y  
116 2do piso, CP 1900, La Plata, Argentina.  
martin.jamilis@ing.unlp.edu.ar

### 1. Introducción

La digestión anaeróbica (DA) es un proceso biológico en el que distintos grupos de bacterias degradan al carbono orgánico en compuestos más simples como ácidos grasos volátiles (VFA), dióxido de carbono ( $\text{CO}_2$ ) y metano ( $\text{CH}_4$ ). Es frecuente encontrarla en tratamiento de efluentes para disminuir la carga orgánica de los caudales tratados. Además, mediante la combustión del biogás producido se puede generar energía [14]. A pesar de sus beneficios, en general su operación está lejos de ser óptima, desperdiciando el potencial de los recursos. Además, las no linealidades y gran incertidumbre en los modelos, sumadas a la escasez de sensores en línea, hacen que su puesta en marcha y operación estable por períodos prolongados sea muy difícil.

La falta de sensores puede solucionarse, al menos parcialmente, utilizando observadores (sensores de software) [2, 3] para estimar las variables de interés. Por ejemplo, trabajos recientes [1, 7, 11, 13] se enfocan en la estimación de carbono orgánico y ácidos grasos en el medio líquido, basadas en la medición de la demanda química de oxígeno (COD), caudal de entrada y metano producido. También resulta muy útil para conocer el estado metabólico de los microorganismos y el diseño de controladores la estimación de las tasas específicas de crecimiento [6, 9].

Previamente a diseñar los observadores debe realizarse un análisis de observabilidad con el fin de determinar si es posible reconstruir el estado a partir de las mediciones disponibles. En sistemas no lineales, el estudio puede realizarse con herramientas de análisis geométrico [10]. Desafortunadamente, es común que las condiciones analíticas obtenidas por estos métodos resulten en expresiones difíciles de interpretar en términos de las variables del proceso. Una alternativa a la metodología mencionada, de menor complejidad, es analizar si existen trayectorias que sean indistinguibles. Esto es, determinar si pueden existir trayectorias diferentes para un mismo conjunto de entradas y salidas. El método de análisis de observabilidad propuesto en [12] se basa en esta idea y permite estudiar si un sistema es observable incluso en casos en los que se desconoce algunas de las entradas.

En este trabajo se estudian las propiedades de observabilidad y detectabilidad de un modelo de DA mediante el método propuesto en [12], incluyendo cinéticas monótonas y no monótonas en concordancia con los modelos estándar comúnmente aceptados para este proceso. El objetivo es evaluar la información que puede ser extraída para diferentes conjuntos de salidas y determinar en cada caso si las variables no medidas pueden ser observadas o detectadas.

### 2. Materiales y métodos

#### 2.1. Método de análisis

El método propuesto en [12] empieza por considerar dos sistemas idénticos  $\Sigma$  (sistema original) y  $\Sigma_c$  (sistema copia), con distintas condiciones iniciales:

$$\Sigma \begin{cases} \dot{x} = f(x, u, w), x(0) = x_0 \\ y = h(x) \end{cases} \quad (1)$$

$$\Sigma_c \begin{cases} \dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u, \hat{w}), \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \\ \hat{y} = h(\hat{x}) \end{cases} \quad (2)$$

donde  $x, \hat{x} \in \mathbb{R}^n$  son los vectores de estados,  $u \in \mathbb{R}^m$  el vector de entradas conocidas (o bien medidas),  $w, \hat{w} \in \mathbb{R}^q$  son los vectores de entradas desconocidas, e  $y, \hat{y} \in \mathbb{R}^p$  los vectores de salida de los sistemas. Además  $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un campo vectorial suave y  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  es una función suave.

Definiendo los errores como  $\tilde{x} = \hat{x} - x$ ,  $\tilde{y} = \hat{y} - y$ ,  $\tilde{w} = \hat{w} - w$ , se puede obtener la dinámica expandida del sistema que incluye la dinámica del error. Además, teniendo en cuenta que el conjunto de trayectorias que producen una misma salida se puede seleccionar considerando  $\tilde{y}(t) = 0$  para todo  $t \geq 0$  (al igual que  $\dot{\tilde{y}} = 0$ ,  $\ddot{\tilde{y}} = 0$ , ...) se obtiene un sistema diferencial algebraico:

$$\Sigma_{eR} \begin{cases} \dot{x} = f(x, u, w), x(0) = x_0 \\ y = h(x) \\ \dot{\tilde{x}} = f(x + \tilde{x}, u, w + \tilde{w}) - f(x, u, w), \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0 \\ 0 = h(x + \tilde{x}) - h(x) \end{cases} \quad (3)$$

El sistema (3) describe la dinámica de las trayectorias indistinguibles, es decir, aquellas trayectorias distintas que para una misma entrada producen idénticas salidas. Las definiciones utilizadas se presentan en el siguiente lema.

**Lema 1** (ref. [12, Lema 4]). *Para el sistema  $\Sigma_{eR}$  (3):*

1. *Dos trayectorias son u-indistinguibles si y solo si están en la forma  $x(t, x_0, u, w)$  y  $x(t, x_0, u, w) + \tilde{x}(t, \tilde{x}_0, u, y, \tilde{w})$ , donde  $x(t)$  e  $y(t)$  son soluciones de (1) y  $\tilde{x}(t)$  es solución de (3).*
2.  *$\Sigma$  es fuertemente u-detectable si y solo si el sistema con restricciones (3) tiene a  $\tilde{x} = 0$  como un punto de equilibrio atractivo, para cada  $y(t, x_0, u, w)$  solución de (1), cada  $\tilde{x}_0$  y cada  $\tilde{w}$  tal que (3) se satisface y  $\tilde{x} \rightarrow 0$ .*
3.  *$\Sigma$  es fuertemente u-observable si y solo si el sistema con restricciones (3) es trivial, es decir, si la única solución es  $\tilde{x} = 0$ .*

Cabe mencionar que la diferencia entre la terminología clásica (ver [8]) y la utilizada en el Lema 1 viene dada por la existencia de entrada desconocida  $w$  y conocida  $u$ . Es decir, u-detectable (observable) correspondería a detectable (observable) conociendo  $u$ . Si todas las entradas son conocidas, las definiciones resultan equivalentes [12]. Una explicación teórica detallada de la relación entre la metodología clásica y la utilizada aquí se puede consultar en la fuente original [12].

## 2.2. Modelo del sistema

La digestión anaeróbica es un proceso muy complejo donde se dan múltiples reacciones químicas y biológicas e intervienen diversos grupos de bacterias. Si bien existen modelos muy completos para describirlo, como el ADM1 [4], para el análisis de observabilidad utilizamos el modelo propuesto en [5]. Este modelo es muy utilizado para el diseño de controladores y observadores, ya que tiene una escala menor. Consta de dos reacciones principales: La acidogénesis es el proceso en el cual las bacterias acidogénicas ( $X_1$ ) transforman al carbono orgánico ( $S_1$ ), cuantificado

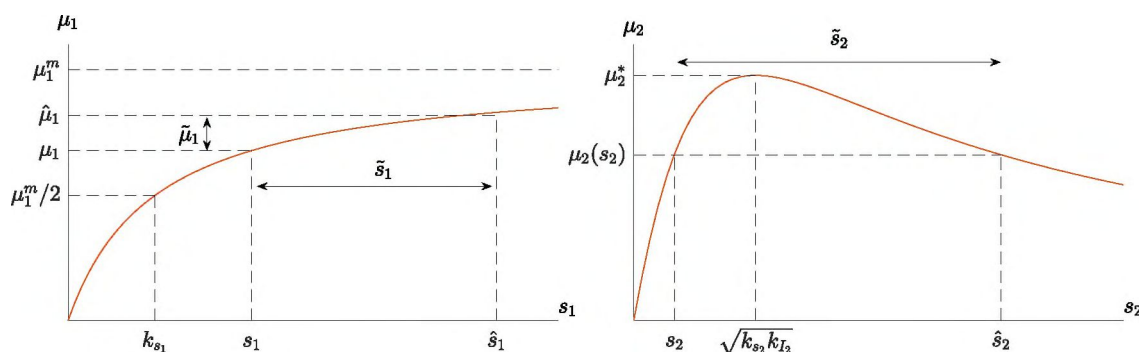


Figura 1: Modelos cinéticos del proceso. En el gráfico de la izquierda se muestra  $\mu_1(s_1)$  (tipo Monod). En el gráfico de la derecha se muestra  $\mu_2(s_2)$  (tipo Haldane). Nótese que para cada valor de  $\mu_2$  corresponden dos valores de  $s_2$ , excepto en el máximo ( $\mu_2^*$ ).

por la COD, en VFA ( $S_2$ ). La metanogénesis es el proceso en el cual las bacterias metanogénicas ( $X_2$ ) transforman los VFA en metano. El modelo dinámico del proceso es [5]:

$$\Sigma \begin{cases} \dot{x}_1 = (\mu_1(s_1) - \alpha D)x_1 & (4a) \\ \dot{x}_2 = (\mu_2(s_2) - \alpha D)x_2 & (4b) \\ \dot{s}_1 = D(s_{1in} - s_1) - k_1\mu_1(s_1)x_1 & (4c) \\ \dot{s}_2 = D(s_{2in} - s_2) + k_2\mu_1(s_1)x_1 - k_3\mu_2(s_2)x_2 & (4d) \end{cases}$$

donde  $x_1$  es la concentración de bacterias acidogénicas,  $x_2$  de bacterias metanogénicas,  $s_1$  de COD y  $s_2$  de VFA.  $D(t) \geq 0$  es la tasa de dilución del proceso,  $s_{1in}$  y  $s_{2in}$  son las concentraciones de COD y VFA en el caudal de entrada. Todos los  $k_i$  son rendimientos estequiométricos y  $\alpha$  es un parámetro introducido para modelar el desprendimiento de las bacterias del soporte de inmovilización o biofilm. Un  $\alpha = 1$  corresponde al caso sin retención y  $\alpha = 0$  al caso con retención total. Finalmente  $\mu_1(s_1)$  y  $\mu_2(s_2)$  son las tasas específicas de crecimiento de las bacterias acidogénicas y metanogénicas, respectivamente. La tasa de crecimiento de las bacterias acidogénicas se describe mediante un modelo cinético del tipo Monod sin inhibición (monótona) y la de las bacterias metanogénicas por un modelo tipo Haldane con inhibición por exceso de VFA (no monótona):

$$\mu_1(s_1) = \frac{\mu_1^m s_1}{k_{s1} + s_1} \quad (5) \quad \mu_2(s_2) = \frac{\mu_2^m s_2}{k_{s2} + s_2 + \frac{s_2^2}{k_{I2}}} \quad (6)$$

donde  $k_{s1}$ ,  $k_{I2}$  son coeficientes cinéticos y  $\mu_1^m$ ,  $\mu_2^m$  representan las tasas máximas de crecimiento. En la Figura 1 se grafican las tasas de crecimiento con respecto a los sustratos. Notar que en el caso de la cinética Haldane (gráfico derecho), para cada valor de tasa de crecimiento existen dos posibles concentraciones de VFA.

### 3. Resultados

En esta sección analizamos la observabilidad y detectabilidad de (4) considerando como salidas medidas los caudales de metano ( $\text{CH}_4$ ) y dióxido de carbono ( $\text{CO}_2$ ). Teniendo en cuenta su baja solubilidad en agua, asumimos que todo el  $\text{CH}_4$  y  $\text{CO}_2$  producido pasa directamente a la fase gaseosa. Se analiza el caso donde los modelos cinéticos son conocidos y el caso en el que se consideran desconocidos por su gran incertidumbre. Los resultados para otros conjuntos de salidas se detallan en la Tabla 1.

### 3.1. Análisis con modelos cinéticos conocidos

En este primer caso consideramos que se conocen todos los parámetros del modelo y que no hay entradas desconocidas. Como se explicó en la Sección 2.1, se define primero una copia del sistema (4) y se calcula la dinámica del sistema expandido:

$$\Sigma_e \begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \Delta_1 - \alpha D \tilde{x}_1 & (7a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_2 = \Delta_2 - \alpha D \tilde{x}_2 & (7b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{s}}_1 = -k_1 \Delta_1 - D \tilde{s}_1 & (7c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{s}}_2 = k_2 \Delta_1 - k_3 \Delta_2 - D \tilde{s}_2 & (7d) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta_1 = \mu_1(s_1 + \tilde{s}_1)(x_1 + \tilde{x}_1) - \mu_1(s_1)x_1 & (7e) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta_2 = \mu_2(s_2 + \tilde{s}_2)(x_2 + \tilde{x}_2) - \mu_2(s_2)x_2 & (7f) \end{cases}$$

Como se consideran como salidas medidas los caudales de metano ( $\text{CH}_4$ ) y dióxido de carbono ( $\text{CO}_2$ ), teniendo en cuenta su baja solubilidad en agua, asumimos que todo el  $\text{CH}_4$  y  $\text{CO}_2$  producido pasa directamente a la fase gaseosa. De esta manera, las salidas son:

$$y_1 = r_{\text{CO}_2} = k_4 \mu_1(s_1)x_1 + k_5 \mu_2(s_2)x_2 \quad (8a)$$

$$y_2 = r_{\text{CH}_4} = k_6 \mu_2(s_2)x_2 \quad (8b)$$

siendo  $y_1$  el caudal de  $\text{CO}_2$  e  $y_2$  el caudal de  $\text{CH}_4$ .

Haciendo  $\bar{y}_2 = 0$  e  $\bar{y}_1 = 0$  se obtienen las siguientes restricciones algebraicas:

$$\Delta_2 = \mu_2(s_2 + \tilde{s}_2)(x_2 + \tilde{x}_2) - \mu_2(s_2)x_2 = 0 \quad (9)$$

$$\Delta_1 = \mu_1(s_1 + \tilde{s}_1)(x_1 + \tilde{x}_1) - \mu_1(s_1)x_1 = 0 \quad (10)$$

Reemplazando  $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$  en (7a)-(7d) resulta

$$\Sigma_e \begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = -\alpha D \tilde{x}_1 & (11a) \\ \dot{\tilde{x}}_2 = -\alpha D \tilde{x}_2 & (11b) \\ \dot{\tilde{s}}_1 = -D \tilde{s}_1 & (11c) \\ \dot{\tilde{s}}_2 = -D \tilde{s}_2 & (11d) \end{cases}$$

donde se puede observar que la dinámica de todos los errores es asintóticamente estable si existe excitación permanente ( $D(t) > 0 \forall t$ ). Por lo tanto, se puede concluir que midiendo tanto el caudal de  $\text{CO}_2$  como de  $\text{CH}_4$  todos los estados son u-detectables.

### 3.2. Análisis con modelos cinéticos inciertos

En esta sección analizamos la observabilidad y detectabilidad de (4), considerando que los parámetros de los modelos cinéticos son desconocidos o sumamente inciertos, es decir, el mapa entre  $\mu_i$  y  $s_i$  no se conoce. De esta manera, se considera a  $\mu_1$  y  $\mu_2$  como entradas desconocidas.

Para el análisis con entradas desconocidas, el sistema copia incorpora a  $\dot{\mu}_1$  y  $\dot{\mu}_2$ . Luego, la

Variables medidas	Con modelo cinético	Sin modelo cinético
$r_{CH_4}$ y $r_{CO_2}$	u-detectable	u-detectable, $\mu_1$ y $\mu_2$ u-detectables
$s_1$ y $s_2$	u-observable	u-detectable, $\mu_1$ y $\mu_2$ u-detectables
$x_1$ y $x_2$	$s_1$ u-observable, $s_2$ u-detectable	u-detectable, $\mu_1$ y $\mu_2$ u-observables
$x_1 + x_2$ y $r_{CH_4}$	u-detectable	u-detectable, $\mu_1$ y $\mu_2$ u-detectables

Tabla 1: Resumen de resultados obtenidos en las secciones 3.1-3.2

dinámica de los errores es

$$\Sigma_e \begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \Lambda_1 - \alpha D \tilde{x}_1 & (12a) \\ \dot{\tilde{x}}_2 = \Lambda_2 - \alpha D \tilde{x}_2 & (12b) \\ \dot{\tilde{s}}_1 = -k_1 \Lambda_1 - D \tilde{s}_1 & (12c) \\ \dot{\tilde{s}}_2 = k_2 \Lambda_1 - k_3 \Lambda_2 - D \tilde{s}_2 & (12d) \\ \Lambda_1 = (\mu_1 + \tilde{\mu}_1)(x_1 + \tilde{x}_1) - \mu_1 x_1 & (12e) \\ \Lambda_2 = (\mu_2 + \tilde{\mu}_2)(x_2 + \tilde{x}_2) - \mu_2 x_2 & (12f) \end{cases}$$

En este caso,  $\tilde{\mu}_1$  y  $\tilde{\mu}_2$  son los términos de incerteza producidos por la incertidumbre en los parámetros de (5)-(6) y las salidas son las mismas que en (8a) y (8b),  $y_1 = k_4 \mu_1 x_1 + k_5 \mu_2 x_2$  e  $y_2 = k_6 \mu_2 x_2$ .

De hacer  $\tilde{y}_1 = 0$  e  $\tilde{y}_2 = 0$  surge  $\Lambda_1 = 0$  y  $\Lambda_2 = 0$ . Luego, se obtiene la misma dinámica que en (11), la cual resulta asintóticamente estable. Esto indica que los estados son u-detectables al igual que en el caso sin entrada desconocida.

Por otra parte, teniendo en cuenta que  $\Lambda_1 = \tilde{\mu}_1 x_1 + \mu_1 \tilde{x}_1 + \tilde{\mu}_1 \tilde{x}_1 = 0$  y tomando el límite  $\tilde{x}_1 \rightarrow 0$ :

$$\lim_{\tilde{x}_1 \rightarrow 0} \Lambda_1 = \lim_{\tilde{x}_1 \rightarrow 0} (\tilde{\mu}_1 x_1 + \mu_1 \tilde{x}_1 + \tilde{\mu}_1 \tilde{x}_1) = \tilde{\mu}_1 x_1 = 0 \quad (13)$$

Por lo tanto, si  $x_1 \neq 0$ ,  $\tilde{\mu}_1 \rightarrow 0$  cuando  $\tilde{x}_1 \rightarrow 0$ . De la misma manera se puede mostrar que si  $x_2 \neq 0$ ,  $\tilde{\mu}_2 \rightarrow 0$  cuando  $\tilde{x}_2 \rightarrow 0$ . Podemos concluir entonces que las entradas desconocidas  $\mu_1$  y  $\mu_2$  son u-detectables.

#### 4. Discusión

La Tabla 1 resume los resultados obtenidos en el análisis de observabilidad y detectabilidad considerando distintas combinaciones de salidas medidas. Puede apreciarse que la mejor situación se da con la medición de  $s_1$  y  $s_2$  donde todos los estados del sistema son u-observables. No obstante, incertezas en los modelos cinéticos de  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  hacen que el sistema se vuelva solamente u-detectable. Otra limitación en la implementación de este esquema es el elevado costo que implica la medición en línea de COD y VFA. Teniendo en cuenta la incertidumbre, la medición de las concentraciones de bacterias  $x_1$  y  $x_2$  individualmente hace que las tasas de crecimiento  $\mu_1$  y  $\mu_2$  sean u-observables, manteniendo la detectabilidad del resto de los estados. Disponer de las tasas es sumamente ventajoso para el control del proceso, ya que éstas son fuertes indicadores del estado metabólico. Sin embargo, medir la concentración de cada bacteria en línea es muy difícil. En contraste, medir flujos de gases y medir turbidez (biomasa total) es más simple y barato que los métodos anteriores. El resultado es el mismo en ambos casos, tanto los estados como las tasas de crecimiento son al menos u-detectables.

El método aplicado en este trabajo puede aplicarse a otras combinaciones de sensores para buscar una configuración que permita obtener observabilidad en lugar de detectabilidad. Incluso



para incorporar a otros parámetros inciertos como entradas desconocidas las concentraciones de sustrato de entrada, por ejemplo.

## 5. Conclusiones

El análisis de observabilidad realizado en este trabajo es una base para la mejora en la monitorización de bioprocesos complejos que impliquen una cadena de reacciones y la coexistencia de distintos grupos funcionales de microorganismos, como la digestión anaeróbica. La ventaja de la herramienta utilizada es que no presenta una gran complejidad matemática, lo que la hace atractiva para sistemas de la complejidad mencionada.

Cabe destacar también que el método permite comparar distintas configuraciones de sensores. Si bien este no es el único criterio de selección, constituye una herramienta muy útil a la hora de elegir que variables se van a medir y sensores a adquirir.

## Referencias

- [1] V. Alcaraz-Gonzalez, E.A. Jauregui-Medina, J.Ph. Steyer, J.P. García-Sandoval, H.O. Méndez-Acosta, and V. Gonzalez-Alvarez. Simultaneous COD and VFA unmeasured process inputs estimation in actual anaerobic wastewater treatment processes. *Control Eng. Pract.*, 60:118 – 123, 2017.
- [2] Jarinah Mohd Ali, N. Ha Hoang, M.A. Hussain, and Denis Dochain. Review and classification of recent observers applied in chemical process systems. *Computers & Chemical Engineering*, 76:27 – 41, 2015.
- [3] G. Bastin and D. Dochain. *On-line Estimation and Adaptive Control of Bioreactors*. Elsevier Science, Amsterdam, 1990.
- [4] Damien J Batstone, J Keller, Irini Angelidaki, SV Kalyuzhnyi, SG Pavlostathis, A Rozzi, WTM Sanders, H Siegrist, and VA Vavilin. The IWA anaerobic digestion model no 1 (ADM1). *Water Sci. Technol.*, 45(10):65–73, 2002.
- [5] Olivier Bernard, Zakaria Hadj-Sadok, Denis Dochain, Antoine Genovesi, and Jean-Philippe Steyer. Dynamical model development and parameter identification for an anaerobic wastewater treatment process. *Biotechnol. Bioeng.*, 75(4):424–438, 2001.
- [6] Hernán De Battista, Jesús Picó, Fabricio Garelli, and José Luis Navarro. Reaction rate reconstruction from biomass concentration measurement in bioreactors using modified second-order sliding mode algorithms. *Bioprocess. Biosyst. Eng.*, 35(9):1615–1625, Nov 2012.
- [7] Ibtissem Didi, Hacen Dib, and Brahim Cherki. A Luenberger-type observer for the AM2 model. *J. Process Control*, 32:117 – 126, 2015.
- [8] Robert Hermann and Arthur Krener. Nonlinear controllability and observability. *IEEE Trans. Autom. Control*, 22(5):728–740, 1977.
- [9] Martín Jamilis, Fabricio Garelli, and Hernán De Battista. Growth rate maximization in fed-batch processes using high order sliding controllers and observers based on cell density measurement. *J. Process Control*, 68:23 – 33, 2018.
- [10] Hassan K Khalil and JW Grizzle. *Nonlinear systems*, volume 3. Prentice Hall New Jersey, 1996.
- [11] Gerardo Lara-Cisneros, Ricardo Aguilar-López, Denis Dochain, and Ricardo Femat. On-line estimation of VFA concentration in anaerobic digestion via methane outflow rate measurements. *Computers & Chemical Eng.*, 94:250 – 256, 2016.
- [12] Jaime A. Moreno, Edmundo Rocha-Cózatl, and Alain Vande Wouwer. A dynamical interpretation of strong observability and detectability concepts for nonlinear systems with unknown inputs: application to biochemical processes. *Bioprocess. Biosyst. Eng.*, 37(1):37–49, Jan 2014.
- [13] A. Rodríguez, G. Quiroz, R. Femat, H.O. Méndez-Acosta, and J. de León. An adaptive observer for operation monitoring of anaerobic digestion wastewater treatment. *Chemical Engineering Journal*, 269:186 – 193, 2015.
- [14] Peter Weiland. Biogas production: current state and perspectives. *Appl. Microbiol. Biotechnol.*, 85(4):849 – 860, 2010.